研究ノート

分数計算のもう一つの解説法
—有理数体の構成的アプローチ—

永井 礼正 [1,2]

概 要

分数演算の解説を目指した有理数の構成的な立場からの解説，及びその中高等教育における教授法.

分数記号 $\dfrac{p}{q}$ は，数の算術のみでなく，Leibniz の記号法などにおいても利便性の高いすぐれた記号である．しかし，それはその記号の運用を理解している，あるいは慣れているという前提がある．初等教育においては，直観的あるいは発生的な見地からその運用を学習させる．量の感覚に訴えて算術の意味を教え，あとは慣れさせるという教育が多いが，それが初等的な段階で失敗に終わることもありうる．Ferix KLEIN は言っている「整数の概念だけは知っているが，測定可能な量の像は持たない人を想像してみればよい」と．本稿は，不幸にして，このような学習が最も効果的に機能する発達時期を過ぎてしまい，かつ未だ分数記号の恩恵に浴することができないでいる生徒や学生に，有理数を現代的に構成することを通じて，分数記号の運用のメカニズムを解説する方法の試案である．ここで有理数の現代的構成とは，整域 $\mathbb{Z}$ の商体の構成である．

1　有理整数環 $\mathbb{Z}$

現代数学の数体系の構成法の一つは，まず空集合を定義し，そこから集合の演算によって自然数全体のなす集合 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$ を定義する．その自然数全体のなす集合 $\mathbb{N}$ から有理整数環 $\mathbb{Z}$ を定義する．その構成とその代数的性質（整域をなすこと）は既知とするが，念のため，整域の定義は述べておく．有理整数環 $\mathbb{Z}$ は，単項イデアル整域であり，さらに Euclid 整域であるが，それらの性質はここでは取り上げない．整域 $\mathbb{Z}$ の商体である有理数体 $\mathbb{Q}$ の構成に必要な条件だけを抽出して取り上げているのである. ただし，有理数体 $\mathbb{Q}$ の順序構造にかかる条件については，参考までに言及することにする．:

1.1　整域 D

定義 1.1. *$I) - IV)$ までの条件を満たす集合 D を整域という:*

[1] 日本教育大学院大学　学校教育研究科
[2] a-nagai@kyoiku-u.jp

加法と乗法が定義されていて：

$$D \times D \to D :(a,b) \mapsto a+b$$
$$D \times D \to D :(a,b) \mapsto ab$$

I) 加法に関してアーベル群をなす：

i) 結合則：$\forall a, \forall b, \forall c \in D \quad a+(b+c)=(a+b)+c$

ii) 単位元の存在：$\exists 0 \in D\, s.t. \forall a \in D \quad a+0=0+a=a$

iii) 逆元の存在：$\forall a \in D, \exists -a \in D\, s.t.\, a+(-a)=(-a)+a=0$

iv) 可換則：$\forall a, \forall b \in D \quad a+b=b+a$

II) 乗法に関して，単位的可換半群をなす：

i) 結合則：$\forall a, \forall b, \forall c \in D \quad a(bc)=(ab)c$

ii) 単位元の存在：$\exists 1 \in D\, s.t. \forall a \in D \quad a1=1a=a$

iii) 可換則：$\forall a, \forall b \in D \quad ab=ba$

III) 分配則：$\forall a, \forall b, \forall c \in D\ a(b+c)=ab+ac,\ (a+b)c=ac+bc$

IV) 零因子を持たない：$ab=0 \Rightarrow a=0$ または，$b=0.$

Remark 1.1 :　　条件 I)-III) までの条件を満たす集合を，単位的可換環という．
Example 1.2 :　　整域の例としては，有理整数環 $\mathbb{Z}$, 体 F, 整域 D を係数とする多項式環 $D[x]$(e.g. $\mathbb{Z}[x]$) 等がある．
また，整域をなさない環の例としては，n 次全行列環 $M_n(F)$(F は，体) がある．

1.2　順序構造

定義 1.2. 有理整数環 $\mathbb{Z}$ における順序は，次の不等式で定義する：

$$a \leqslant b \underset{def}{\Longleftrightarrow} b-a \in \mathbb{N}$$

Remark 1.3 :　　有理整数環 $\mathbb{Z}$ は，全順序構造を持つ：

$$a \leqslant b\,(a,b \in \mathbb{Z}) \Rightarrow \forall c \in \mathbb{Z}, a+c \leqslant b+c$$
$$a \leqslant b\,(a,b \in \mathbb{Z}) \Rightarrow \forall c \in \mathbb{N}, ac \leqslant bc$$

2　有理数体 $\mathbb{Q}$

2.1　有理数

定義 2.1. 一次方程式

$$a_d x = a_n \ (a_d, a_n \in \mathbb{Z},\ a_d \neq 0),$$

この解 α を有理数と呼び，その全体集合を $\mathbb{Q}$ で表す. (以降，定義方程式を含め，有理数 $\alpha : [a_d x = a_n]$ 等と書くが，定義方程式の不定元の係数は，非零であるとする.) ただし，等号 $\alpha = \beta$ $(\alpha : [a_d x = a_n], \beta : [b_d x = b_n])$ は次の同値関係で定義する.

$$\alpha = \beta \underset{def}{\Longleftrightarrow} a_d b_n - a_n b_d = 0$$

定理 2.1. 一次方程式 $a_d x = a_n$ $(a_d, a_n \in \mathbb{Z},\ a_d \neq 0)$ の解は，一意的である. $[(\because)$ $\mathbb{Z}[x]$ が整域をなすことに注意して，$a_d x = a_n, a_d \widetilde{x} = a_n$ ならば，$a_d(x - \widetilde{x}) = a_d x - a_d \widetilde{x} = a_n - a_n = 0, a_d \neq 0$ より $x - \widetilde{x} = 0$ $\ i.e.\ x = \widetilde{x}]$

定理 2.2. 等号 $\alpha = \beta$ は，同値関係である.

i) $\alpha = \alpha$ $(\alpha : [a_d x = a_n])$:
$a_d a_n - a_n a_d = 0$

ii) $\alpha = \beta \Rightarrow \beta = \alpha$ $(\alpha : [a_d x = a_n], \beta : [b_d x = b_n])$:
$a_d b_n - a_n b_d = 0 \Rightarrow b_d a_n - b_n a_d = -(a_d b_n - a_n b_d) = 0$

iii) $\alpha = \beta, \beta = \gamma \Rightarrow \alpha = \gamma$ $(\alpha : [a_d x = a_n], \beta : [b_d x = b_n], \gamma : [g_d x = g_n])$:
$a_d b_n - a_n b_d = 0, b_d g_n - b_n g_d = 0 \Rightarrow a_d g_n - a_n g_d = 0$ を示せばよい.

$$(\because)(a_d g_n - a_n g_d) b_d = g_d(a_d b_n - a_n b_d) + a_d(b_d g_n - b_n g_d) = 0, b_d \neq 0$$

Remark 2.1 :　有理数 α : $[a_d x = a_n]$ において，整数 a_d, a_n に公約数 m があれば，$a_d = m\widetilde{a_d}, a_n = m\widetilde{a_n}, (\widetilde{a_d}, \widetilde{a_n} \in \mathbb{Z})$ と書ける. ここで，$\widetilde{\alpha} : [\widetilde{a_d} x = \widetilde{a_n}]$ とおけば，$\alpha = \widetilde{\alpha}$
$(\because) a_d \widetilde{a_n} - a_n \widetilde{a_d} = (m\widetilde{a_d})\widetilde{a_n} - (m\widetilde{a_n})\widetilde{a_d} = m(\widetilde{a_d}\widetilde{a_n} - \widetilde{a_n}\widetilde{a_d}) = 0$

Remark 2.2 :　係数 $a_d = 1$ とおけば，$\alpha = a_n \in \mathbb{Z}$, $(i.e.\ \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q})$

2.2　加法

加法：和 $\alpha + \beta$ $\ (\alpha : [a_d x = a_n], \beta : [b_d y = b_n])$ を定義するとすれば：

$$a_d x = a_n \tag{1}$$

$$b_d y = b_n \tag{2}$$

より，$z := x + y$ の定義方程式を導けばよい：
$\{(2)$ の不定元の係数 $b_d\} \times (1) : b_d \times a_d x = b_d \times a_n \Rightarrow b_d a_d x = b_d a_n$
$\{(1)$ の不定元の係数 $a_d\} \times (2) : a_d \times b_d y = a_d \times b_n \Rightarrow a_d b_d y = a_d b_n$
両辺をそれぞれ足して：$a_d b_d z = a_d b_d (x + y) = b_d a_n + a_d b_n$ となる．このことから次の定義を得る；

定義 2.2. 加法：和 $\alpha + \beta$ $(\alpha : [a_d x = a_n], \beta : [b_d x = b_n])$ を次の一次方程式の解として定義する*:*

$$a_d b_d x = b_d a_n + a_d b_n$$

Remark 2.3 :　　同値関係から有理数の等号を定義したが，それは有理数の表現の曖昧さ（同じ有理数が異なった定義方程式を持ちうること）を意味する．新しく定義された演算が，それぞれの表現（定義方程式）の曖昧さに関係のない，有理数上に定義された演算であることを,「この演算の定義は，well defined である」という．

定理 2.6. 加法の定義は，*well defined* である*:*

$$\alpha = \widetilde{\alpha}, \beta = \widetilde{\beta} \Longrightarrow \alpha + \beta = \widetilde{\alpha} + \widetilde{\beta}$$

$(\because)$

$$\begin{gathered} a_d \widetilde{a_n} - a_n \widetilde{a_d} = 0 \ (\alpha : [a_d x = a_n], \widetilde{\alpha} : [\widetilde{a_d} x = \widetilde{a_n}]), \\ b_d \widetilde{b_n} - b_n \widetilde{b_d} = 0 \ (\beta : [b_d x = b_n], \widetilde{\beta} : [\widetilde{b_d} x = \widetilde{b_n}]) \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \alpha + \beta : [a_d b_d x = b_d a_n + a_d b_n], \\ \widetilde{\alpha} + \widetilde{\beta} : [\widetilde{a_d} \widetilde{b_d} x = \widetilde{b_d} \widetilde{a_n} + \widetilde{a_d} \widetilde{b_n}] \end{gathered}$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} & (a_d b_d)(\widetilde{b_d} \widetilde{a_n} + \widetilde{a_d} \widetilde{b_n}) - (b_d a_n + a_d b_n)(\widetilde{a_d} \widetilde{b_d}) \\ &= (a_d b_d \widetilde{b_d} \widetilde{a_n} - b_d a_n \widetilde{a_d} \widetilde{b_d}) + (a_d b_d \widetilde{a_d} \widetilde{b_n} - a_d b_n \widetilde{a_d} \widetilde{b_d}) \\ &= b_d \widetilde{b_d} (a_d \widetilde{a_n} - a_n \widetilde{a_d}) + a_d \widetilde{a_d} (b_d \widetilde{b_n} - b_n \widetilde{b_d}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Remark 2.4 :　　加法の単位元は，$a_d x = 0$ の解であり, これを有理整数環 $\mathbb{Z}$ の加法の単位元 0 と同一視する．また，$\alpha : [a_d x = a_n]$ の加法の逆元 $-\alpha$ は，$a_d y = -a_n$ の解である．

2.3　乗法

乗法：積 $\alpha \cdot \beta$ $(\alpha : [a_d x = a_n], \beta : [b_d x = b_n])$ を定義するとすれば：

$$a_d x = a_n$$
$$b_d y = b_n$$

より，$z := xy$ の定義方程式を導けばよい：

両辺をそれぞれかけて：$a_d b_d z = a_d b_d(xy) = a_n b_n$ となる．このことから次の定義を得る；

定義 2.3. 乗法：積 $\alpha \cdot \beta \ \ (\alpha : [a_d x = a_n], \beta : [b_d x = b_n])$ を次の一次方程式の解として定義する:

$$a_d b_d x = a_n b_n$$

定理 2.8. 乗法の定義は，*well defined* である:

$$\alpha = \widetilde{\alpha}, \beta = \widetilde{\beta} \Longrightarrow \alpha \cdot \beta = \widetilde{\alpha} \cdot \widetilde{\beta}$$

$(\because)$

$$a_d \widetilde{a_n} - a_n \widetilde{a_d} = 0 \ (\alpha : [a_d x = a_n], \widetilde{\alpha} : [\widetilde{a_d} x = \widetilde{a_n}]),$$
$$b_d \widetilde{b_n} - b_n \widetilde{b_d} = 0 \ (\beta : [b_d x = b_n], \widetilde{\beta} : [\widetilde{b_d} x = \widetilde{b_n}])$$

$$\alpha \cdot \beta : [a_d b_d x = a_n b_n],$$
$$\widetilde{\alpha} \cdot \widetilde{\beta} : [\widetilde{a_d} \widetilde{b_d} x = \widetilde{a_n} \widetilde{b_n}]$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned}
&(a_d b_d)(\widetilde{a_n} \widetilde{b_n}) - (a_n b_n)(\widetilde{a_d} \widetilde{b_d}) \\
&= b_d \widetilde{b_n}(a_d \widetilde{a_n} - a_n \widetilde{a_d}) + a_n \widetilde{a_d}(b_d \widetilde{b_n} - b_n \widetilde{b_d}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Remark 2.5 ： 乗法の単位元は，$1x = 1$ の解であり，これを有理整数環 $\mathbb{Z}$ の乗法の単位元 1 と同一視する．また，$\alpha(\neq 0) : [a_d x = a_n]$ の乗法の逆元 α^{-1} は，$a_n y = a_d$ の解である．$[(\because) xy = 1$ とおくと $a_n y = (a_d x) y = a_d(xy) = a_d 1 = a_d]$ また $\alpha \neq 0$ とすると $a_n \neq 0$ となる．このことより，α^{-1} も，有理数である．
Remark 2.6 ： 有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ は体をなし，有理数体 $\mathbb{Q}$ と呼ぶ.

定義 2.4. 有理数 $\alpha : [a_d x = a_n]$ の正負を，次で定義する：

$$\begin{cases} \alpha > 0 & \textit{if } a_d a_n > 0 \\ \alpha < 0 & \textit{if } a_d a_n < 0 \\ \alpha = 0 & \textit{if } a_d a_n = 0 \ (i.e.\, a_n = 0) \end{cases}$$

定義 2.5. 有理数体 $\mathbb{Q}$ における順序は，次の不等式で定義する：

$$\alpha \leqslant \beta \underset{def}{\Longleftrightarrow} \beta - \alpha \geqslant 0$$

Remark 2.7 :　有理数体 $\mathbb{Q}$ は，全順序構造を持つ：

$$\alpha \leqslant \beta\,(\alpha, \beta \in \mathbb{Q}) \Rightarrow \forall\gamma \in \mathbb{Q}, \alpha + \gamma \leqslant \beta + \gamma$$
$$\alpha \leqslant \beta\,(\alpha, \beta \in \mathbb{Q}) \Rightarrow \forall\gamma \geqslant 0(\gamma \in \mathbb{Q}), \alpha\gamma \leqslant \beta\gamma$$

Remark 2.8 :　有理数体 $\mathbb{Q}$ は稠密である：

$$\forall\alpha, \forall\gamma(\alpha < \gamma), \exists\beta\ s.t.\ \alpha < \beta < \gamma$$

$[(\because)\alpha : [a_d x = a_n], \gamma : [g_d x = g_n]$ とすれば，β として，$[2a_d g_d x = g_d a_n + a_d g_n]$ の解を選べばよい．実際，$\beta - \alpha = \gamma - \beta : [2a_d g_d x = a_d g_n - g_d a_n]$. $2a_d g_d(a_d g_n - g_d a_n) > 0$ は，$\alpha < \gamma$ から従う．]

3　指導方法

以上の構成は，基本的に整域 $\mathbb{Z}$ の代数構造と順序構造，また，一次式の運用（整域 $\mathbb{Z}[x]$ の代数構造）のみの知識があれば，理解できよう．そしてそれが教師の舞台裏ということになる．しかし，このままの形で生徒や学生に示せば，忽ち代数的記号に目を奪われて，混乱に陥り，分数演算など迷宮入りとなってしまうだろう．

具体的な指導例として，以下のストーリーでの解説はどうだろうか?:
まず，前提として中学校 1，2 年時に学習する「数と式」の内容については馴染んでいるとする．また，整域の性質としての $(ab = 0 \Rightarrow a = 0$ または， $b = 0)$ も，注意しておく．

分数： 有理数 α の分数表示 $\dfrac{b}{a}, (a \neq 0)$ は，有理数 α が $ax = b\,(a \neq 0)$ の解として書けるという意味であるとし，有理数 $\dfrac{b}{a} : [ax = b]$ と表すことにする．例えば，有理数 $\dfrac{1}{2} : [2x = 1], \dfrac{3}{5} : [5x = 3]$ というように．

種々の計算を，この定義方程式の算術として実行し，結果を分数表示に戻して表現する．

約分： 約分については：$\dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}\ (\dfrac{6}{10} : [10x = 6], \dfrac{3}{5} : [5x = 3])$
$5x = 3$ の両辺を 2 倍して $10x = 6$,
逆に $10x - 6 = 2(5x - 3) = 0, 2 \neq 0 \Longrightarrow 5x - 3 = 0\,(i.e. 5x = 3)$
このことから，どちらかを整数倍すると同じ方程式になるものは，方程式として同値なものとしてあつかうことができ，両者は同じ解を持つ.

計算の過程を残して分数表示で書けば：

$$\frac{6}{10} = \frac{2 \times 3}{2 \times 5} = \frac{3}{5}$$

通分： 通分については：

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{5}=\frac{11}{10}\ (\frac{1}{2}:[2x=1],\frac{3}{5}:[5y=3],\frac{11}{10}:[10z=11])$$

$$2x=1 \tag{3}$$
$$5y=3 \tag{4}$$

より，$z:=x+y$ の方程式を導けばよい．

$\{(4)$ の不定元の係数 $5\}\times(3):5\times 2x=5\times 1\Rightarrow 10x=5$
$\{(3)$ の不定元の係数 $2\}\times(4):2\times 5y=2\times 3\Rightarrow 10y=6$
両辺をそれぞれ足して：$10x+10y=5+6\Rightarrow 10z=10(x+y)=11$ となる．
計算の過程を残して分数表示で書けば：

$$\frac{5\times 1+2\times 3}{2\times 5}:[(2\times 5)z=(5\times 1+2\times 3)]$$

除法： 除法については：$\frac{1}{2}\div\frac{3}{5}=\frac{5}{6}\ (\frac{1}{2}:[2x=1],\frac{3}{5}:[5y=3],\frac{5}{6}:[6z=5])$

$$2x=1 \tag{5}$$
$$5y=3 \tag{6}$$

より，$z:=x\div y$ の方程式を導けばよい．$z=x\div y\Rightarrow x=zy$

(5) 式に代入：$2x=2zy=1$, この式に (6) の不定元の係数をかけて，(6) に注意すると：

$$1\times 5=(2zy)\times 5=(2z)\times(5y)=2z\times 3=(2\times 3)z\Rightarrow 6z=5$$

分数表示で書けば：

$$\frac{1}{2}\div\frac{3}{5}=\frac{1\times 5}{2\times 3}=\frac{5}{6}[(2\times 3)z=1\times 5].$$

永井礼正　研究ノート：分数計算のもう一つの解説法　へのコメント

斎藤　俊則（日本教育大学院大学　学校教育研究科　准教授）

本稿は分数演算のアルゴリズムを、具体例で表された量的概念を経由せずに、抽象的に定義された前提と演算規則によって構成的に把握させる解説手法を提案するものである。なお、このアプローチで用いられる「前提と演算規則」はすべて中学校 1,2 年時に学習する「数と式」の学習範囲で扱われるものである。

本稿の内容は 1 章及び 2 章における数学的前提の定義と、3 章の解説アプローチの提案からなる。数学的前提は整域 Z の定義（1 章）と整域 Z の商体である有理数体 Q の順序構造の定義（2 章）からなる。3 章では 1 章および 2 章における定義を前提に、分数を有理数 α の分数表示 $\frac{b}{a}, (a \neq 0)$に対する解として解釈することから定義方程式（有理数 $\frac{b}{a}: [ax = b]$）を構成し、分数演算（約分、通分、除法）のアルゴリズムをこの定義方程式の算術として説明する解説手法が示されている。

この手法は中学校 1,2 年時の学習範囲に限定された前提から分数計算の数学的意味を論理的に説明できる可能性を示した点で特筆すべきものである。分数概念の導入段階においては、確かに具体例による量的概念に即した説明（たとえば「$\frac{1}{3}$とはケーキを 3 等分にしたうちの 1 つ」など）が、学習理解を助けるであろうと推測される。しかしながら、分数を具体例に対応づけて理解することが習慣化してしまう場合、具体例への還元が困難な演算（たとえば $\frac{11}{23} + \frac{5}{37}$）を扱う段階において、還元の困難さがそのまま学習の困難さにつながる可能性がある。これは物理世界とは独立に系をなす数学の本質上不可避のことである。このとき、対象の数学的理解をあきらめた上で計算手順の反復と訓化に頼るという方略のみならず、きわめてシンプルな前提から対象を数学的に理解する本質論的な方略が示されることは、数学を学ぶことの意味に疑問を感じている多くの学習者に数学本来の「面白さ」を予見させ、学習意欲を喚起するという点で大きな価値があると考えられる。