特別寄稿論文

アポロニウスの接触問題についての新しい作図法

伊藤　説朗[1]

数学の学習活動をより豊かにしたり楽しくしたりするための工夫の一つとして数学史を活用することがある。また、それにより学習内容の理解を深める効果も期待されている。その中でも、円に関する内容は数学史上にも注目されるものが少なくない。一つに、アポロニウスの接触問題がある。3 円の場合は作図が困難とされ、作図題としては教材化されにくかった。ところが、比較的容易な作図方法があることを発見した。これを用いれば、高校の幾何あるいは中学校の発展学習の教材として活用できることを主張する。

キーワード：　アポロニウスの接触問題（3 円の場合）

1．はじめに

アポロニウスの接触問題というのは、H.L.ヒースが彼の著書「ギリシア数学史」の中で次のように紹介している問題のことである。「〈三つのもの、それは点、直線、円のうちのどのくみあわせでもよいが、それらが与えられているとする。そのうちの 1 点もしくはいくつかの点(そのように与えられているなら)を通り、直線または円に接する円を、その場合に応じて、描くこと〉、与えられた三つのもののくみあわせは、(1) 3 点、(2) 3 直線、(3) 2 点と 1 直線、(4) 2 直線と 1 点、(5) 2 点と 1 円、(6) 2 円と 1 点、(7) 2 直線と 1 円、(8) 2 円と 1 直線、(9)1 点と 1 直線と 1 円、(10) 3 円、である。」 これらの接触問題について、C.B.ボイヤーは彼の著書「数学史 2」において、以下のように説明している。「もっともやさしい二つの場合(3 点か 3 直線)からもっとも難しい場合(3 円に接する円)までである。もっともやさしい 2 例は、三角形の内接円と外接円に関連してユークリッドの『原論』にすでにのっていた。『接触』の第Ⅰ巻ではほかの 6 例を取り上げ、第Ⅱ巻は 2 直線と 1 円の場合と 3 円の場合だけを取り上げていた。われわれにはアポロニオスの解法そのものは伝わっていないが、パッポスによる情報からそれを再現することが可能である。それにもかかわらず、16 世紀と 17 世紀の学者たちは一般に、アポロニオスは最後の 3 円の場合は解いていないと受け取っていた。それゆえ、かれらはこの問題を自分たちの能力への挑戦とみなしたのである。定規とコンパスのみでそれに解答を与えた者のなかには、ニュートン(Newton, Isaac)もいた。」

1　日本教育大学院大学 学校教育研究科

3 円の場合というのは、「3 つの円が与えられたとき、それらのどれにも接する円を作図せよ」という問題である。この問題については、パッポスの方法はじめ多くの作図法が知られているが、しかし、そのいずれもかなり複雑であり、それを高校数学の教材として取り入れることには困難が伴う。そこで、この問題の解法としてより簡単なものを提供し、それを用いれば、教材として利用しやすいことを提案する。

2．3 円の場合の作図法

次の図 1 のように 3 円 O_1, O_2, O_3 があり、それぞれの半径を r_1, r_2, r_3 とし、$r_1>r_2>r_3$ であるとする。そのうちの半径が最小の円 O_3 を、半径 0 の円、つまり、点と見なし、残りの 2 円についてそれぞれ半径を (r_1-r_3), (r_2-r_3) とする 2 円 K_1, K_2 に置き換える。そして、点 O_3 を通り、2 円 K_1, K_2 に接する円 K を作図する、という問題に帰着させる。というのは、円 K が作図できれば、それと同心円で半径を r_3 だけ小さくした円 O が求める円だからである。

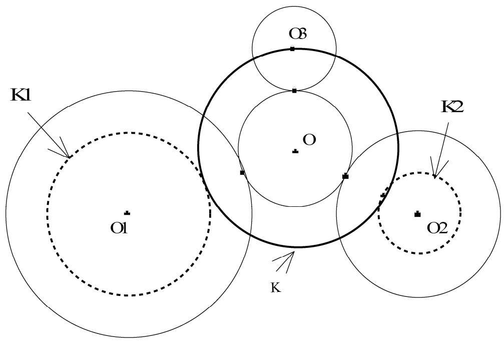


図 1

与えられた 1 点を通り、与えられた 2 円に接する円を作図せよ、というのは、アポロニウスの接触問題の (6) の問題である。この作図法がなかなか困難であった、ということである。

3．1 点と 2 円の場合の作図法

図 2 のように、点 A と 2 円 K_1, K_2 が与えられたとする。①2 円の共通接線と 2 円の中心を結ぶ直線の交点、すなわち、相似の中心、を L とし、それぞれの接点を T_1, T_2 とする。②2 点 L, A を通る直線を ℓ とし、3 点 A, T_1, T_2 を通る円を描く。この円と直線 ℓ との交点を B、円 K_1 との交点を C とする。③2 点 T_1 と C を結ぶ直線が ℓ と交わる点を M とし、M から円 K_1 に引いた接線の接点を P とする。3 点 A, B, P を通る円が求める円である。

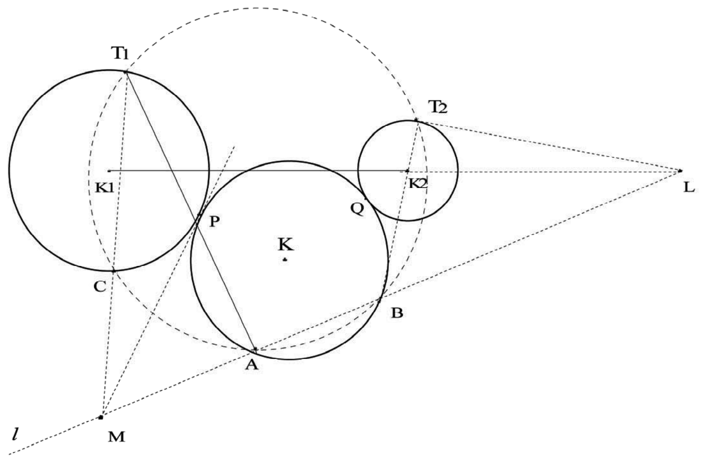


図 2

４．作図法の根拠

図 3 を基に説明する。まず、①3 点 A, B, P を通る円 K が、点 P で円 K_1 に接していること。

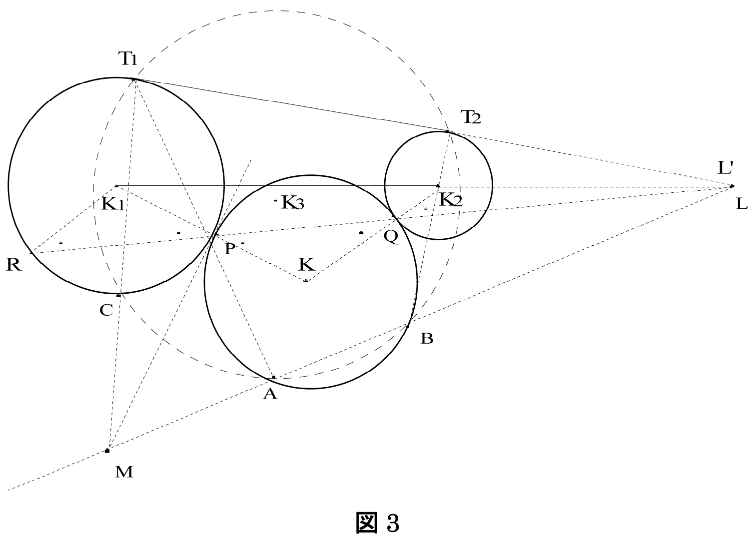


図 3

3 点 A, T_1, T_2 を通る円 K_3 及び円 K_1 おいて、

$$MA \cdot MB = MC \cdot MT_1 = MP^2$$

これより、円 K において、

$$MA \cdot MB = MP^2$$

となることから、MP は円 K の接線である。

②円 K が点 Q で円 K_2 に接すること。

今、円 K が点 Q で接していると仮定し、2 点 P, Q を通る直線が円 K_1 と（もう一つの点）R で交わり、直線 K_1K_2 の延長と点 L'で交わったとする。点 L と L'が同一点であることを示す。△KPQ が二等辺三角形であることから、$\angle K_1RL' = \angle K_2QL'$。すなわち、$K_1R \parallel K_2Q$。したがって、

$$L'K_1 : L'K_2 = K_1R : K_2Q = LK_1 : LK_2$$

つまり、L'は L と一致する。そして、

$$LA \cdot LB = LP \cdot LQ \quad \cdots\cdot (*)$$

が成り立つ。

次に、円 K が円 K_2 に接していなかったと仮定し、直線 PL と円 K との交点を Q'とする。このとき、

$$LA \cdot LB = LP \cdot LQ' \quad \cdots\cdot (**)$$

である。しかるに、(*) と (**) から、点 Q と Q'は同一点である。ゆえに、円 K は円 K_2 と Q で接する。

以上のことから、3 円の場合も、その作図法及び根拠の説明はともに高校の幾何あるいは中学校の発展学習の教材にふさわしいものであり、容易に利用できることが分かる。

5．おわりに

様々な作図法がこれまでにも知られているが、中でもニュートンの方法がしばしば注目される。彼の方法も、上記に示したものと同じく、アポロニウスの接触問題の (6) に帰着させるという考えである。ところが、先に示した作図法で重要な役割を果たすもう一つの点（点 B）を見出す方法が非常に難解で作図の手続きも煩瑣である。さらに、その解法においては極めて複雑な大きさをもつ半径を作図する必要があり、残念ながら、この点からも教材として利用しにくい。

3 円の問題については、図 1 の場合でも 8 通りの円が描ける。これについては、本稿末に掲載しておく。また、証明については、相似の中心を、2 円の中心を結ぶ線分上にとる場合にも、まったく同様に行うことができるので、ここでは割愛する。さらに、3 円の位置や大きさによって、さまざま場合が考えられるが、この点についても本稿では割愛する。

なお、3 円の問題について、定規とコンパスによる作図とは別に、さまざまな方法やアイデアで解決が図られていることは周知の通りである。ここでは、初等幾何の作図題の教材として利用できることを目指したので、それには言及していない。

最後に、本稿をまとめるに当たり、先行研究の調査など、根本裕巳氏（東京都足立区立花保小学校主幹教諭）にご協力いただいた。ここに記して謝意を表したい。

引用及び参考文献

T.L.ヒース（平田寛ほか訳）(1998, 復刻版)、「ギリシア数学史」、共立出版。

C.B.ボイヤー（加賀美、浦野共訳）(1984)、「数学史 2」、朝倉書店。

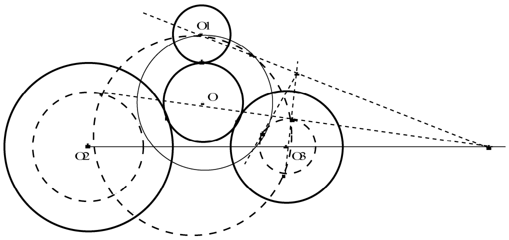
山下純一(1980)、「数学発見ものがたり」、東京図書(株)。

岩田至康・編(1993)、「幾何学大事典 1」、槙書店。

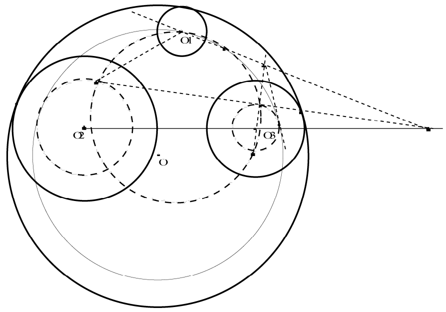
Sir I.Newton（Translated by Mr.Ralphson, et al）(1768), Universal Arithmetick, W.Jhonston, LONDON.

【3 円の場合、8 通りの作図】

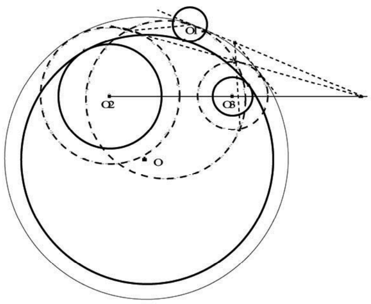
(1)



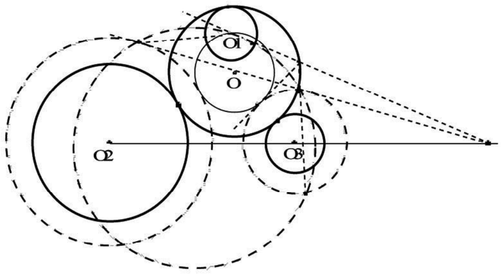
(2)



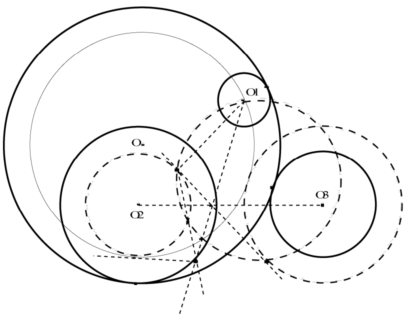
(3)



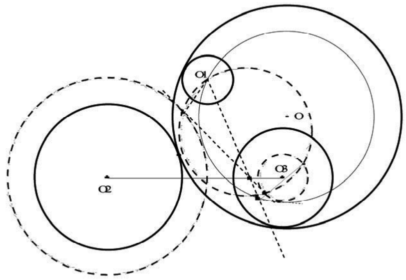
(4)



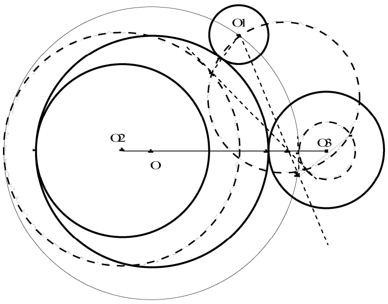
(5)



(6)



(7)



(8)