特集「共生教育実践研究」

「すべての教科に数学の力を」

永井 礼正 [1][2]

概 要

星槎大学教員免許状更新講習 (神奈川県川崎市) :「思考力を養う授業デザイン」(平成 27 年 9 月 21 日から 23 日),「愉快な論理的思考講習」(平成 28 年 9 月 17 日から 19 日) と題された選択科目（各 18 時間）において，数学領域からの情報提供として行われた内容に関する記録.

講習全体の形式としては，数学領域（数学，数学教育）からの数学的思考力に関する情報提供をもとに，プロジェクト学習を手法とした授業デザインの講義をワークショップ形式で実施した後，最終的には多様な受講生それぞれの教育活動において，思考力の養成を目指した授業企画をデザインしてゆくという形で進められた.

1 「すべての教科に数学の力を」

数学と雖も初めから抽象的な概念が体系化されていたわけではなく,「ものの見方・数え方」が基本となる.『ヒトは，ものの一つの見方として「量」を経験し，それを「解釈」する.』 このことは原始的であり，ヒトは発達のかなり早期の成長段階でも，量に限らず多様な経験に対して，それなりの解釈をしている.「量の解釈」が，ヒトの経験において基本的なものであるとするならば，この取り扱いを通じて，すべての学年やすべての教科にわたる基礎とできないかという試みとして，二つの講習をデザインした.

2 「思考力を養う授業デザイン」(平成 27 年)

2.1 数学的解釈の取り扱いに就いて

ヒトは成長の過程において，種々の苦労を忘れてゆく．数を覚えるということをとっても，小学生は幼児の頃に 1 から 100 までの数を覚える苦労を忘れているであろうし，中学生にとって九九（掛け算の算術）などは，小学生の頃の涙ぐましい努力を忘れているだろう．そして，苦労を忘れた後は,「あたりまえ」の事実，あるいは簡単なこととして，解釈してしまうことが多い.

単に,「数える」といっても実際はそんなに容易ではない．実際にトーナメントの試合の数，階段を上がる方法が何通りあるか（例えば，10 段の階段を上がるとき，一歩を 1step づつ，または 2step ごとと，組み合わせて上がる歩みの方法の数）などは，解釈の仕方によって数え方にその

[1]日本教育大学院大学　学校教育研究科
[2]a-nagai@kyoiku-u.jp

労力の違いがでる.「数え上げる」ということに関しては，実際に専門書[3]もあるくらいで，なかなか難しい問題であるということを見過ごしている人は多いのではないだろうか. さらに,「数える」ことの解釈を見直すことにより，現代数学は「集合論」を通じることにより，無限に対する取り扱いに至っている.

2.2　セレンディィピティ

解釈の丁寧な取り扱い方について，上田睆亮[4]「１９６１年１１月２７日の出来事」を紹介しておこう.

> 「１９６１年１１月２７日に筆者の得ていたアナログ計算機の出力データが，現在のところ２次自励周期系の最古のカオスとされている.」
> 「１９６１年１１月２７日は筆者にとって記念すべき日となったが，その日に跳び上がって喜ぶような素敵な出来事があった訳でもないし，その日以来ずっとその日の出来事を憶えていたのでもない.
> ... 中略 ...
> したがって，もう少しで捨て去られていた反故同然の古いアナログ計算機出力記録紙の隅に日付が残っていなければ，この日は確認できなかったであろう.」

これは，上田睆亮氏により，いわゆる「カオス現象」の最古の記録が，自らの手で再発見されたときの逸話である.「カオス現象」の発見ですら経験していても，その本質は日常に潜んでいて，解釈に至らないこともありうるということである.

このような経験していても，その当時には解釈に至らず，しかし，幸いにも再発見され，新たなる解釈を生み出した事例として,「セレンディピティ」と呼ばれる一連のドラマがある. (R. M. ロバーツ 『セレンディピティ　思いがけない発見・発明のドラマ』[5][6])

数学のように極めて原始的な解釈であっても，文学のように複雑な解釈であっても，日常の経験を見逃さず，物事を考えてゆくための教育のヒントを得るために，次の方法を掲げておこう.

R. S. レノックス[7]「学生が幸福な偶然を利用できるような心構えを育てる方法」

> 予想されたことばかりでなく予想されなかったことも含め，すべてを観察し記録する訓練を課すこと.
> また，この訓練では学生に実験ノートをつけさせ，それを指導者が単に「正しい」か「誤り」かに基づくだけではなく，観察能力や記録能力に基づいて評価すること（を合わせて評価すること）が必要である.
> その際，研究分野を注意深く十分に勉強しておくこと.

[3] Richard P. STANLEY: Enumerative Combinatorics < *math.mit.edu/˜rstan/ec/ec1.pdf* >
[4] 上田睆亮『カオス研究の経緯と将来展望（最終講義資料）』(2000 年 3 月 3 日)
[5] R. M. ロバーツ 著　安藤喬志 訳　化学同人（１９９３）
[6] Royston M. ROBERTS: SERENDIPITY (Accidental Discoveries in Science),1989
[7] R. S. レノックス『セレンディピティー的発見のための教育』(Journal of Chemical Education, Vol. 62, 1985, p,282)

2.3　カリキュラムへのヒント

一般横断的なカリキュラムに関しては，やはり同じような推察，異なることへの推察，似て非なることへの省察，一見しては類推できることの難しいことへの省察の手がかりとして，過去現在にわたる先人の異文化への考察として，種々の旅行記・観察記が参考になろう．

1. マルコポーロ「東方見聞録」
2. シーボルト「日本 X 誌（X=植物，動物）」
3. ファーブル「昆虫記」
4. 金惠京「涙と花札—韓流と日流のあいだで」(2012)
5. ibid「風に舞う一葉—身近な日韓友好のすすめ」 (2015)

2.4　教室における活動へのヒント

いわゆるゼミナール（苗床）と呼ばれているものは，研究と教育の架橋としてドイツのギナジュウムでの方法をヒントとして，ドイツの大学で行われてきた．

学生の答案解答を，教師のみでなく，他の学生も採点（評価）に参加することにより，評価されることだけでなく，評価することへの教育をすすめることが肝要である．

自己の評価としても，ノート（過去の消えない手跡）を残すことにより，自らの誤りの履歴，また，ある時期においては何もしなかったのであるという無の事実を残す．ことへの時間との戦いを記録することも肝要である．(e.g. 岡潔ノート）

今は，解釈がつかず，誰しもが見えているものを見つつ，誰もが考えることのないことを考える．そして謙虚に記述する．それが数学を貫く姿勢であるし，他分野の教育活動でもそうして思考が反省のヒントとして，考えられる行くことが望まれる．

みえないものを見抜き（一般化），みえるものを見ないため（抽象化）のヒントのまとめのために以下を提示しておこう．

1. 日常を見直す（人の考えをよく聞く）
2. 習慣を見直す（先入観を捨てる）
3. 常識を見直す（素朴に考える）

3　「愉快な論理的思考講習」(平成 28 年)

3.1　数学再入門

「数学は難しいか？」

数学は，本来難しくない！のではないか．これに対して，文学は，本質的に難しい！恋愛の問題を一つ採ってみても，そもそも答えがあるかどうかも分らない．

では，数学の難しさはどこにあるのか？数学を,「公理系から構築される無矛盾な論理体系」と考えてみることにする．数学において論理の一つ一つのステップは，一歩一歩と歩みを進めることと同じであり，ごく自然な営みに見える．ところが，案内人もいない見知らぬ街で，目的地に迷わず到達することは困難であることがある．

数学教育については，案内する側と案内される側の難しさがあり，その観点から，数学教育の難しさについて，以下を検討することにする．

1. 「数学を習うことの難しさ」

   数学の習うことの難しさとして，特に丁寧な授業を聞いていると，説明内容の一つひとつは当たり前であり，当たり前の積み重ねは，やはり当たり前なのでないかという錯覚に陥る．例えば，ガイド（道案内）不在による迷子のように．

   「積み重ねること＝構築することの難しさ.」

2. 「学習者の認識，誤謬の論拠.」

   次のような問題があるとする：ある人がおなじ道程を，往路は時速 60[km/h] で行き，帰路は時速 30[km/h] で帰りました．平均時速は，何 [km/h] ですか？

   平均時速は，

   (a) $45[\mathrm{km/h}] = \dfrac{60+30}{2}[\mathrm{km/h}]$

   (b) $40[\mathrm{km/h}] = \dfrac{60+30\times\ 2}{3}[\mathrm{km/h}]$

   のいづれか？

3. 「成長過程による思考の転換に対応した教育課程.」

   「ヒトの思考の発達の段階」への配慮をしなければならないこと.

   ヒトは成長の過程において，論理的思考，言語能力の発達は一様でないため，思考の教材として具象的なものが適切であるのか，抽象的なものが適切であるのかを十分精査しなければならない.

   (a) $5-3=2$ 「5 個のリンゴのうち，3 個食べました.」→「残りは，2 個」

   (b) $3-5=?$「小さい数から大きな数をひいてはいけません.」（そのような約束【言語】を教える.）

(c) $3-5=2$：誤答（約束を破ったに過ぎない）

(d) 誤答：「$3-5=2$」　の考え方「3 と 5 という数の差は?（3 と 5 は，対等）」

(e) 3 − 5 の絶対値 $|3-5|$ は?（3 と 5 の距離)

(f) 自然数全体の集合における約束：

「ある個数のもの達から，より多くの個数のもの達は，取り除けない.」

自然数 (物の個数ありき) ではなく，機能優先：減法（引き算）$\rightarrow$ 整数

4. 「数学の発展」: 数の拡張

「どんな数でも自乗すると，非負になる．$\forall x, x^2 > 0$」$\rightarrow$「自乗して負になる数はない.」正しくは,「どんな実数も自乗すると，非負になる．$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$」「自乗して負になる実数はない.」(では，その数は実数ではないかもね．)

5. 「約束の見直し」（初等中等教育でも，種々の約束がある.）

(a) $(-1)\times(-1)=1$「九九（掛け算の算術）で習いませんでした.」

(b) 数を零で割ってはいけない.「位相（極限の取り扱い）を習いませんでした.」

4　「まとめとして」

論理的思考力が重要な資質として問われているが，数学に限ったこととしても，やはり「量」の経験に関する「解釈」が基本となる．その意味で，解釈にまつわる，個人の成長や認知におけるきっかけ（ヒント）を，教育の現場において十分注意していかなければならないであろう．数学の場合,「量の解釈」が直接的に「数の思考」につながる局面が多く，そのことがほかの領域に比べ，思考における透明性を高めており，単純に考えうるという強みもあり，逆にそこが難しいという印象をあたえてしまうのかもしれない.

リテラシーとしても，思考力の基礎としても，数学の迷信が論理的でない「約束」からの解放により，よりよく理解される，各領域の教育活用の場で実践されていくことを望みたい.

なお，実際の講習としては，統計の内容に関するセッションもあったが，本稿では割愛した.